Il en résulte que l'équation

$\begin{cases} N(x)=0 \\ x \in [0,\frac{\pi}{2}[\end{cases}$ admet deux solutions dont l'une est $\frac{\pi}{4}$ car $N(\frac{\pi}{4})=0$

c) • f est définie , continue sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

• f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et non dérivable en 0 , la courbe de f présente donc une demi tangente verticale au point O(0,0) et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$$f'(x)=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}-1=\frac{1+\tan^2 x-2\sqrt{\tan x}}{2\sqrt{\tan x}}=\frac{N(x)}{2\sqrt{\tan x}}$$

D'après l'étude faite en b) , il en résulte que :

$\forall x \in [0,\alpha] \cup [\frac{\pi}{4},+\infty[$, $N(x) \geq 0$ et $\forall x \in]\alpha,\frac{\pi}{4}[$, $N(x)<0$

x	0	α		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	$f(\alpha)$ ↗	↘	$1-\frac{\pi}{4}$	↗	$+\infty$

• $f(\frac{\pi}{4})=1-\frac{\pi}{4}>0$ d'où , d'après le tableau des variations de f , on a :

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[\ , f(x) \geq 0 .$$

Solution 21 :

$$1°/\ \lim_{0^+} f = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$